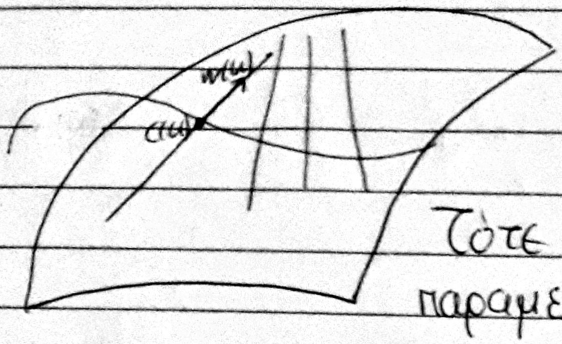
Μάθημα 23ο 12/01/2018

Ευθειογενείς Επιφάνειες



γενέτειρες

$c: I \longrightarrow S$

$c'(u) \times w(u) \neq 0$

Τότε η ευθειογενής επιφάνεια παραμετρίζεται ως $\boxed{X(u,v) = c(u) + v\,w(u)}$ (*)

$\|w(u)\| = 1$

Αντίστροφα, κάθε επιφάνεια που τοπικά παραμετρίζεται μέσω της (*) είναι ευθειογενής επιφάνεια

Αναπτυκτές Επιφάνειες

Ορισμός Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ (i) είναι ευθειογενής και (ii) το εφαπτόμενο επίπεδο (ή ισοδύναμα το μοναδιαίο κάθετο) παραμένει σταθερό κατά μήκος κάθε γενέτειρας.

Παραδείγματα κυλινδρικές, κωνικές, επιφάνειες εφαπτομένων

Ερώτημα Υπάρχουν άλλες αναπτυκτές επιφάνειες?

Πρόταση Κάθε ευθειογενής επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Μια επιφάνεια με καμπυλότητα $K \equiv 0$ χωρίς ισόπεδα σημεία είναι αναπτυκτή

ΠΡΟΤΑΣΗ Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει καμπυλότητα $K = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Μια ευθειογενής επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow$ $[c'(u), w(u), w'(u)] = 0 \ \forall u$

Έστω S αναπτυκτή επιφάνεια. Τοπικά παραμετρίζεται μέσω της (*). Άρα $[c'(u), w(u), w'(u)] = 0$

$\Rightarrow \boxed{w'(u) = a(u)c'(u) + b(u)w(u)}$ (1)

$\langle w(u), w(u) \rangle = 1 \overset{\text{παραγωγίζω}}{\Longrightarrow} 2\langle w'(u), w(u) \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{w'(u) \perp w(u)}$

Μπορεί να υποθέσω ότι η c τέμνει τις γενέτειρες υπό ορθή γωνία $\Rightarrow \langle c'(u), w(u) \rangle = 0$

$(1) \xrightarrow{\cdot w(u)} b(u) = 0$ Συνεπώς η (1) γράφεται

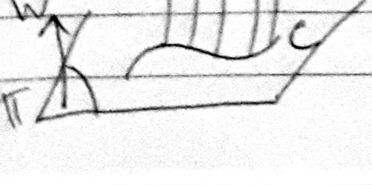
$\boxed{w'(u) = a(u)c'(u)}$

Διακρίνω 3 περιπτώσεις

(i) Έστω ότι $a(u) = 0 \ \forall u \in I$

$w'(u) = 0 \Rightarrow w(u) =$ σταθερό διάνυσμα. Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια είναι κυλινδρική με καμπύλη οδηγό τη c η οποία είναι επίπεδη διότι

$\langle c(u), w \rangle' = \langle c'(u), w \rangle = 0 \Rightarrow \langle c(u), w \rangle =$ σταθ.



$\langle \vec{r}, w \rangle =$

(ii) Έστω $\alpha(u) = \sigma\tau\alpha\theta = \alpha \neq 0 \quad \forall u \in I_0 \subseteq I$

$w'(u) = \alpha c'(u) \Rightarrow (w(u) - \alpha c'(u))' = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{w(u) = \alpha c(u) + p_0 \quad , p_0 \in \mathbb{R}^3}$$

$\Rightarrow$ Η επιφάνεια είναι κωνική

(iii) Η συνάρτηση α πληρεί την συνθήκη
$\alpha'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I_0 \subseteq I$

$X(u,v) = c(u) + vw(u)$, $X_u(u,v) = c'(u) + vw'(u) = c'(u) + v\alpha(u)c'(u)$

$X_u(u,v) = (1+v\alpha(u))\,c'(u)$ | $\underbrace{X_u \times X_v(u,v)}_{\text{το παίρνω για να δω αν είναι κανονική}} = (1+v\alpha(u))\,\underbrace{c'(u) \times w(u)}_{\neq 0 \ \forall u}$

$X_v(u,v) = w(u)$

Η επιφάνεια παραμ. Χ δεν είναι κανονική εκεί όπου $1+v\alpha(u)=0$
$\Leftrightarrow v = -\frac{1}{\alpha(u)}$. Τα σημεία όπου η Χ δεν είναι κανονική είναι:
$X(u, -\frac{1}{\alpha(u)}) = c(u) - \frac{1}{\alpha(u)} w(u)$ Τα σημεία αυτά μου φτιάχνουν την καμπύλη.

Θεωρώ την:
$\tilde{c}(u) = c(u) - \frac{1}{\alpha(u)} w(u)$
Την παραγωγίζω

$$\tilde{c}'(u) = c'(u) - \frac{1}{\alpha(u)} w'(u) + \frac{\alpha'(u)}{\alpha^2(u)} w(u) =$$

$$= c'(u) - \frac{1}{\cancel{\alpha(u)}} \cancel{\alpha(u)} c'(u) + \frac{\alpha'(u)}{\alpha^2(u)} w(u) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tilde{c}'(u) = \frac{\alpha'(u)}{\alpha^2(u)} w(u) \Rightarrow$ Η επιφάνεια είναι επιφ. εφαπτ. της $\tilde{c}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια τοπικά είναι κυλινδρική, κωνική, επιφάνεια εφαπτομένων

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K \equiv 0$ ΧΩΡΙΣ ΙΣΟΠΕΔΑ σημεία είναι τοπικά κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομένων

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα $K \equiv 0$ (και χωρίς ισόπεδα σημεία) είναι τοπικά ισόμετρη με επίπεδο

Απόδ.

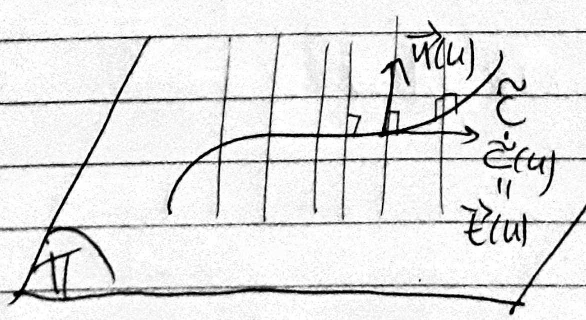
Έστω S επιφάνεια με $K \equiv 0$ χωρίς ισόπεδα σημεία. Τότε είναι αναπτυκτή και τοπικά παραμετρίζεται ως:

$$X(u,v) = c(u) + v w(u), \quad \|w(u)\| = 1, \quad \langle c'(u), w(u) \rangle = 0,$$
$$w'(u) = \alpha(u) c'(u), \quad c'(u) \neq 0$$

Υποθέτω ότι η c έχει παράμετρο το μήκος τόξου, δηλαδή $\|c'(u)\| = 1$

$$X_u(u,v) = c'(u) + v w'(u) = c'(u) + v\alpha(u) c'(u)$$
$$\Rightarrow X_u(u,v) = (1 + v\alpha(u)) c'(u)$$
$$X_v(u,v) = w(u)$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(u,v) &= (1+v\alpha(u))^2 \\ F(u,v) &= 0 \\ G(u,v) &= 1 \end{aligned}}$$



Θεωρώ επίπεδο Π και καμπύλη $\tilde{c}: I \to \Pi$ με παράμετρο το μήκος τόξου $u \in I$

Κοντά στην καμπύλη $\tilde{c}$ παραμετρώ το επίπεδο Π ως εξής: $\tilde{X}(u,v) = \tilde{c}(u) + v\vec{n}(u)$ (κάθετες ευθείες)

$\tilde{X}_u(u,v) = \dot{\tilde{c}}(u) + v\dot{\vec{n}}(u) = \vec{t}(u) - v\kappa(u)\vec{t}(u)$

$\tilde{X}_u(u,v) = (1 - v\kappa(u))\vec{t}(u)$, $\tilde{X}_v(u,v) = \vec{n}(u)$

Τα θεμελειώδη ποσά $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ Π ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\tilde{X}$ είναι

$\tilde{E}(u,v) = \|\tilde{X}_u(u,v)\|^2 \Rightarrow$ $\tilde{E}(u,v) = (1 - v\kappa(u))^2$

$\tilde{F}(u,v) = 0$

$\tilde{G}(u,v) = 1$

Επιλέγω καμπύλη $\tilde{c}$ τα Π με καμπυλότητα $\kappa(u) = -\alpha(u)$

Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = e^x - e^y$

i) Αφού δειχθεί ότι είναι κανονική, να βρεθούν, αν υπάρχουν οι ασυμπτωτικές της καμπύλες

ii) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο $p_0 = (1,1,0)$

iii) Είναι αναπτυκτή; Είναι ευθειογενής

iv) ∃ δίκτυο ασυμπτωτικών καμπυλών?

ΛΥΣΗ

Η S είναι κανονική ως γράφημα της $h(x,y) = e^x - e^y$ με σύστημα συντεταγμένων

$X: \mathbb{R}^2 \to S$, $X(u,v) = (u, v, f(u,v)) = (u, v, e^u - e^v)$

Τα θεμελιώδη ποσά $2^{ας}$ τάξης της S ως προς το σύστημα συντεταγμ. X είναι:

$$e = \frac{h_{uv}}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} \quad , \quad f = \frac{h_{uv}}{\sqrt{}} \quad , \quad g = \frac{h_{uv}}{\sqrt{}}$$

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \quad \Bigg| \quad e = \frac{e^u}{\sqrt{1+e^{2u}+e^{2v}}} \quad , \quad f=0 \quad , \quad g = \frac{-e^v}{\sqrt{\ldots}}$$

$$eg-f^2 = \frac{-e^{u+v}}{1+e^{2u}+e^{2v}} < 0 \Rightarrow K<0 \Rightarrow \exists\ 2$$ οικογένειες ασυμπτωτικών καμπυλών.

Η επιφανειακή καμπύλη $c(t) = X(u(t),v(t))$ είναι ασυμπτωτική ανν $II_{c(t)}(c'(t)) = 0 \Leftrightarrow e(u(t),v(t))(u'(t))^2 + 2f(\ )u'(t)v'(t) + g(\ )(u'(t))^2 = 0$

$$\Leftrightarrow e^{u(t)}(u'(t))^2 - e^{v(t)}(v'(t))^2 = \left(e^{\frac{u(t)}{2}}(u'(t))\right)^2 - \left(e^{\frac{v(t)}{2}}(v'(t))\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{u(t)}{2}}u'(t) + e^{\frac{v(t)}{2}}v'(t)\right)\left(e^{\frac{u(t)}{2}}u'(t) - e^{\frac{v(t)}{2}}v'(t)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{u(t)}{2}}\frac{u'(t)}{2} + e^{\frac{v(t)}{2}}\frac{v'(t)}{2} = 0 \quad ή \quad e^{\frac{u(t)}{2}}\frac{u'(t)}{2} - e^{\frac{v(t)}{2}}\frac{v'(t)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{u(t)}{2}} + e^{\frac{v(t)}{2}}\right)' = 0 \quad ή \quad \left(e^{\frac{u(t)}{2}} - e^{\frac{v(t)}{2}}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Η $c(t) = X(u(t),v(t))$ είναι ασυμπτωτική καμπύλη

$$\Leftrightarrow e^{\frac{u(t)}{2}} + e^{\frac{v(t)}{2}} = c_1 \quad ή \quad e^{\frac{u(t)}{2}} - e^{\frac{v(t)}{2}} = c_2$$

Έχω 2 οικογένειες ασυμπτ. καμπυλών.

(I) $\boxed{u(t)=2t}$, $e^{t}+e^{\frac{v(t)}{2}}=c_1 \Leftrightarrow e^{\frac{v(t)}{2}}=c_1-e^{t} \Leftrightarrow$ $c_1>e^t$

$e^{v(t)}=(c_1-e^t)^2 \Leftrightarrow \boxed{v(t)=2\log(c_1-e^t)}$

$c(t)=X(2t, 2\log(c_1-e^t))=(2t, 2\log(c_1-e^t), e^t-e^{\log(c_1-e^t)^2})$

$=(2t, 2\log(c_1-e^t), e^{2t}-(c_1-e^t)^2)$

$$\boxed{c(t)=(2t, 2\log(c_1-e^t), 2c_1e^t-c_1^2), \quad c_1\in\mathbb{R}^2}$$

(II) $u(t)=2t$ $\quad e^t-e^{\frac{v(t)}{2}}=c_2 \Leftrightarrow e^{\frac{v(t)}{2}}=e^t-c_2>0$

$\Leftrightarrow e^{v(t)}=(e^t-c_1)^2 \Rightarrow \boxed{v(t)=2\log(e^t-c_2)}$

$c(t)=X(2t, 2\log(e^t-c_2))=(2t, 2\log(e^t-c_2), e^{2t}-(e^t-c_2)^2)$

ii) $p_0=(1,1,0)=X(1,1)$. Το διάνυσμα $w\in T_{p_0}S\setminus\{0\}$,

$w=\alpha X_u(1,1)+bX_v(1,1)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e(1,1)\alpha^2+2\cancel{f(1,1)\alpha b}^{\,0}+g(1,1)b^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e}{\sqrt{1+2e^2}}\alpha^2-\frac{e}{\sqrt{1+2e^2}}b^2=0 \Leftrightarrow \alpha^2-b^2=0 \Leftrightarrow (\alpha+b)(\alpha-b)=0$

$\alpha=b$ ή $\alpha=-b$

$$w=\begin{cases} \alpha X_u(1,1)+X_v(1,1) & \alpha=b \\ \alpha X_u(1,1)-X_v(1,1) & \alpha=-b \end{cases}$$

iii) Δεν είναι καθώς $K<0$

$$c'(t) = \left(2, \frac{-2e^t}{c_1 - e^t}, 2c_1e^t\right)$$

$$c''(t) = \left(0, *, 2c_1e^t\right)$$

$$K(t) = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'(t)\|^3} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c(t)$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΥΘΕΙΑ

Άρα η S όχι ευθειογενής

iv) $K<0 \Longrightarrow$ γύρω από κάθε σημείο $\exists$ δίκτυο ασυμπ. καμπ.

Να βρεθεί τέτοιο δ. ασυμπ. καμπ.

Θεωρώ σύστημα συντεταγμένων $\tilde{X}$ με παραμέτρους

$$(*) \quad \begin{cases} \tilde{u} = e^{\frac{u}{2}} + e^{\frac{v}{2}} \\ \tilde{v} = e^{\frac{u}{2}} - e^{\frac{v}{2}} \end{cases} \quad \tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) = X(u,v)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{u}{2}} = \frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2} \\ e^{\frac{v}{2}} = \frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2\log\left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\right) \\ v = 2\log\left(\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\tilde{X}(\tilde{u}, \tilde{v}) = X\left(2\log\left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\right), 2\log\left(\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right)\right)$$

$$= \left(2\log\left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\right), 2\log\left(\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right), \left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right)^2\right)$$

Δεν ξέρω αν είναι σύστημα συντεταγμένων (πρέπει να το αποδείξω)

$$\tilde{X} = X \circ \phi, \quad \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u,v) = \left(2\log\left(\frac{\tilde{u}+\tilde{v}}{2}\right), 2\log\left(\frac{\tilde{u}-\tilde{v}}{2}\right)\right)$$

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Δίνεται επιφάνεια $z = xy^2$
Αφού δείξετε ότι είναι κανονική, εξετάστε αν είναι ευθειογενής και αναπτυκτή. Να βρεθούν οι κύριες καμπυλότητες

Η S είναι κανονική ως γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$h(x,y) = xy^2$ με σύστημα συντεταγμένων

$X: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $X(u,v) = (u, v, uv^2)$

ΕΧΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

$X(u,v) = (u,v,uv^2) = (u,0,0) + (0,v,uv^2) = (u,0,0) + v(0,1,uv)$

$X(u,v) = (0,u,0) + (u,0,uv^2) = (0,u,0) + u(1,0,v^2) = c(u) + u\,w(v)$
όπου $c(u) = (0,v,0)$
$w(v) = (1,0,0) \neq 0$
$\Rightarrow$ Η S είναι ευθειογενής

$X_u = (1,0,v^2)$

$X_v = (0,1,2uv)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & v^2 \\ 0 & 1 & 2uv \end{vmatrix} =$$

$= (-v^2, -2uv, 1)$

Επομένως: $N(u,v) = \dfrac{X_u \times X_v\,(u,v)}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}}(-v^2, -2uv, 1)$

Παρατηρώ ότι εξαρτάται από το u $\Rightarrow$ ΟΧΙ ΑΝΑΠΤΥΚΤΗ

$2^{ος}$ τρόπος να δείξω ότι ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΠΤΥΚΤΗ είναι με καμπυλότητα Gauss

$h(u,v) = uv^2$

$h_u = v^2, \quad h_{uu} = 0, \quad h_{uv} = 2v, \quad h_v = 2uv$

$h_{vv} = 2u$.

$h_{uu} h_{vv} - h_{uv}^2 - 4v^2 \neq 0 \Rightarrow K \neq 0 \Rightarrow$ <u>ΟΧΙ αναπτυκτή</u>

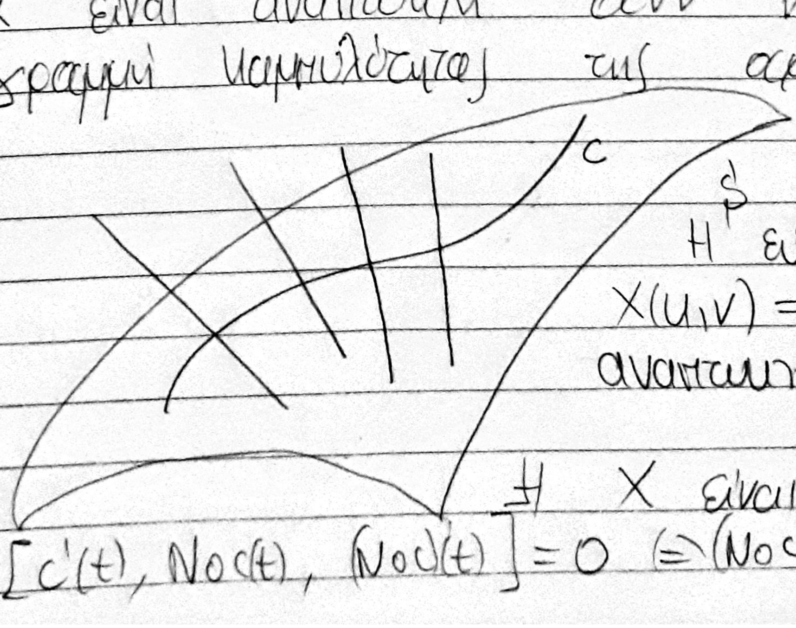
$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}, \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \dfrac{eG - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}$

$E = 1 + h_u^2, \quad F = h_u h_v, \quad G = 1 + h_v^2$

$e = \dfrac{h_{uu}}{\sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}}, \quad f = \dfrac{h_{uv}}{\sqrt{\ }}, \quad g = \dfrac{h_{vv}}{\sqrt{\ }}$

Δίνεται επιφάνεια S και κανονική επιφανειακή καμπύλη $c: I \to S$, $t \in I$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $X(t,v) = c(t) + vN(c(t))$ όπου N είναι η απεικόνιση Gauss της S. Αποδείξτε ότι η X είναι αναπτυκτή αννν η καμπύλη c είναι γραμμή καμπυλότητας της αρχικής επιφάνειας S.



παίρνω τις κάθετες ευθείες στην c.

Η ευθειογενής επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow [c'(u), w(u), w'(u)] = 0$ $\forall u$

Η X είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow$

$[c'(t), N\circ c(t), (N\circ c)'(t)] = 0 \Leftrightarrow (N\circ c)'(t) = \lambda(t) c'(t) + \mu(t) N\circ c(t)$ $(*)$

$\langle N\circ c(t), N\circ c(t)\rangle = 1 \Rightarrow 2\langle (N\circ c)'(t), (N\circ c)(t)\rangle = 0$

$(*) \Rightarrow \underbrace{\cancel{\langle (N\circ c)'(t)\, N\circ c(t)\rangle}}_{0} = \lambda(t)\underbrace{\langle c'(t)\, N\circ c(t)\rangle}_{0} + \mu(t)$

$\Rightarrow \mu(t) = 0$

$(N\circ c)'(t) = \lambda(t)\, c'(t) \Rightarrow$ $c(t)$ крив. лин.